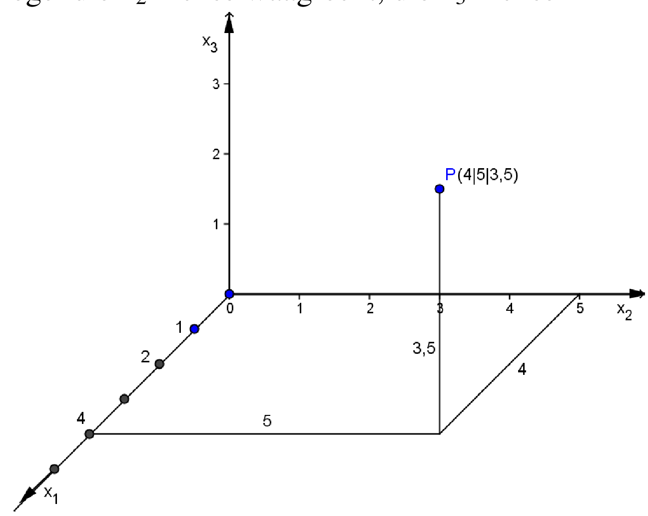
Zusammenfassung: Vektorielle Geometrie im 3-dim. Raum

1. Ein **<u>Vektor</u>** enthält 3 Zahlen als Komponenten, untereinander geschrieben, z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. **<u>Punkte</u>** werden durch je 3 Koordinaten, nebeneinander geschrieben, dargestellt, z.B. P(6|2|5).
3. Zu jedem Punkt P gibt es einen **<u>Ortsvektor</u>**, der vom Koordinaten-Ursprung (0|0|0) zu P führt; z.B. zu P(6|2|5) ist der Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
4. Zu je zwei Punkten gibt es einen **<u>Verbindungsvektor</u>**, z.B. zu P(6|2|5), Q(7|4|8) ist $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 7-6 \\ 4-2 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. Ein <u>Vektor ist unabhängig von seiner Lage im Raum</u>; z.B. ist der Ortsvektor von A(1|2|3) gleich dem Verbindungsvektor der Punkte P(6|2|5) und Q(7|4|8): $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$.
6. Bei einem **<u>3D-Koordinatensystem</u>** wird in der Regel die x_2-Achse waagrecht, die x_3-Achse senkrecht und die x_1-Achse im 135°-Winkel zur x_3-Achse gezeichnet. Die Einheiten auf der x_1-Achse werden um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ verkürzt, sodass (bei Verwendung von 1cm für die Einheiten auf der x_2- und der x_3-Achse) die Einheit auf der x_1-Achse genau der Diagonalen eines Karos entspricht.



7. Es gibt vier **<u>Verknüpfungen von Vektoren</u>**:

a) <u>s-Multiplikation</u>: $r\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot x_1 \\ r\cdot x_2 \\ r\cdot x_3 \end{pmatrix}$;Bsp.: $5\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.

b) <u>Vektor-Addition</u>: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$; Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) <u>Skalarprodukt</u>: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$; Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot(-3) = 1$.

d) <u>Vektorprodukt</u>: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2\cdot y_3-x_3\cdot y_2 \\ x_3\cdot y_1-x_1\cdot y_3 \\ x_1\cdot y_2-x_2\cdot y_1 \end{pmatrix}$; Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix}$

Außer beim Skalarprodukt, das jeweils eine Zahl zum Ergebnis hat, liefern also alle diese Vektor-Verknüpfungen wiederum einen Vektor.

8. Die **<u>Länge eines Vektors</u>** $\vec{v}$ ist stets eine nicht-negative Zahl, nämlich $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \circ \vec{v}}$;
Nur der **Nullvektor** hat die Länge 0: $\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$.
Multipliziert man einen Vektor mit dem Kehrwert seiner Länge, so entsteht ein Vektor der Länge 1, ein "**<u>normierter</u>**" Vektor oder **<u>Einheitsvektor</u>**.

9. Den **<u>Winkel zwischen zwei Vektoren</u>** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt man mit Hilfe der Umkehrung der Kosinus-Funktion: $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1} \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. (Einstellung "degrees"!)
Insbesondere beträgt der Winkel zwischen zwei Vektoren 90° (d.h., die Vektoren sind **<u>orthogonal</u>**), wenn das <u>Skalarprodukt der beiden Vektoren 0</u> ergibt.
Außerdem ist zu beachten, dass das <u>Vektorprodukt zweier Vektoren immer</u> einen Vektor liefert, der <u>zu beiden Faktoren orthogonal</u> ist.

10. "Dreiecksgleichung": Sind A, B, C drei beliebige Punkte im Raum, so gilt für die Verbindungsvektoren stets $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. (Es kommt also dasselbe heraus, wenn man einerseits direkt von A nach C geht oder wenn man einen "Umweg" über B macht.)

11. Eine Gerade wird stets durch eine Gleichung mit Parameter beschrieben, man spricht demgemäß von der "**<u>Parameterform einer Geradengleichung</u>**".
$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, beschreibt eine Gerade, deren (beliebiger) **<u>Aufpunkt</u>** P den Ortsvektor $\vec{p}$ besitzt ($\vec{p}$ heißt in diesem Fall der **<u>Stützvektor</u>** der Geraden) und für die $\vec{a}$ ($\neq \vec{O}$) ein **<u>Richtungsvektor</u>** ist.
Jede reelle Zahl t, eingesetzt in diese Gleichung, liefert den Ortsvektor eines Geradenpunkts.
Richtungsvektoren dürfen mit einem beliebigen Vorfaktor ($\neq 0$) "gekürzt" oder "erweitert" werden, Stützvektoren in der Regel nicht. (Ausnahme: Nullpunktsgeraden).
Falls nicht die ganze Gerade gefragt ist, sondern z.B. die <u>Verbindungsstrecke</u> zweier Punkte P und Q, so sieht die Gleichung genauso aus wie eben, aber durchläuft nur alle Zahlen zwischen 0 und 1.

12. **<u>Punktprobe</u>** bei Geraden: Ein Punkt R liegt auf einer Geraden g, wenn der Ortsvektor $\overrightarrow{OR}$, in die Geradengleichung eingesetzt für $\vec{x}$, zu einer Lösung für den Parameter t führt.

13. Zwei **Geraden** $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, und $h: \vec{x} = \vec{q} + u \cdot \vec{b}$, $u \in \mathbb{R}$, sind **<u>parallel</u>**, wenn die Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel, also Vielfache voneinander sind. Liegt außerdem P auf h (oder Q auf g), so sind die Geraden **<u>identisch</u>**.
Die Geraden sind **<u>orthogonal</u>**, wenn die Richtungsvektoren orthogonal sind.
Der **<u>Winkel</u>** α zwischen zwei sich schneidenden (!) Geraden ist gleich dem Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren. Ist allerdings $\alpha > 90°$, so bezeichnet man als Winkel zwischen den Geraden den Nebenwinkel $180° - \alpha$.

14. Allgemein können zwei Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, und $h: \vec{x} = \vec{q} + u \cdot \vec{b}$, $u \in \mathbb{R}$, im Raum mehrere verschiedene Lagen zu einander einnehmen:

a) Sie können **<u>parallel</u>** sein, insbesondere sogar **identisch**. (Siehe vorigen Punkt)
b) Sie können genau einen **<u>Schnittpunkt</u>** besitzen.
c) Sie können **<u>windschief</u>** sein.
Um zwischen einander schneidenden und windschiefen Geraden unterscheiden zu können, setzt man die Geradengleichungen gleich ($\vec{p} + t \cdot \vec{a} = \vec{q} + u \cdot \vec{b}$), zerlegt die Gleichungen komponentenweise in die 3 Gleichungen eines LGS und bestimmt dessen Lösungsmenge. Falls es eine eindeutige Lösung für t (und folglich auch für u) gibt, setzt man diese in die Geradengleichung ein und erhält so den (Ortsvektor des) Schnittpunkt(s). Wenn es keine Lösung gibt (und Parallelität zuvor ausgeschlossen wurde), sind die Geraden windschief.

15. Eine Ebene kann durch eine Gleichung mit Parametern beschrieben werden, man spricht demgemäß von der "**Parameterform einer Ebenengleichung**".

E: $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a} + u \cdot \vec{b}$, t, u $\in \mathbb{R}$, beschreibt eine Ebene, deren (beliebiger) **Aufpunkt** P den Ortsvektor $\vec{p}$ besitzt ($\vec{p}$ heißt in diesem Fall der **Stützvektor** der Ebene) und für die $\vec{a}$, $\vec{b}$ **Spannvektoren** sind. Beachte: Spannvektoren müssen linear unabhängig sein, d.h. sie dürfen nicht parallel, also keine Vielfachen voneinander sein.
Jedes reelle Zahlenpaar (t,u), eingesetzt in diese Gleichung, liefert den Ortsvektor eines Ebenenpunkts.

Spannvektoren dürfen mit einem beliebigen Vorfaktor ($\neq 0$) "gekürzt" oder "erweitert" werden, Stützvektoren in der Regel nicht. (Ausnahme: Nullpunktsebenen).

Die Gleichung A: $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a} + u \cdot \vec{b}$, t,u $\in$ [0; 1] beschreibt die Punkte, die zum Parallelogramm den Eckpunkt P und den Seiten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gehören (gesamte Fläche einschl.Rand).

16. In vielen Fällen ist zur Beschreibung einer Ebene eine andere Form vorteilhafter, nämlich die "**Koordinatenform einer Ebenengleichung**".
E: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ (mit festen Zahlen a, b,c, d, wobei von den ersten drei mindestens eine von 0 verschieden sein muss) beschreibt eine Ebene mit einem **Normalenvektor** $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, der orthogonal zur Ebene und folglich auch zu jedem Verbindungsvektor von zwei Punkte der Ebene ist.
Punktprobe für die Ebene: Jeder Punkt $P(x_p|y_p|z_p)$ liegt genau dann in der Ebene, wenn seine Koordinaten die Ebenengleichung erfüllen: $a \cdot x_p + b \cdot y_p + c \cdot z_p = d$.

17. Die Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen nennt man **Spurpunkte**. Mit Hilfe der Kordinatengleichung der Ebene E: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ sind sie schnell zu bestimmen: $S_1(d/a|0|0)$, $S_2(0|d/b|0)$, $S_3(0|0|d/c)$. [Ist einer der Nenner gleich 0, so gibt es den entsprechenden Spurpunkt nicht, d.h.die Ebene ist parallel zur entsprechenden Achse.]
Die Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen nennt man **Spurgeraden**. Man erhält sie als Verbindungsgeraden der Spurpunkte bzw., falls die Ebene parallel zu einer Koordinatenachse ist, indem man deren Richtungsvektor an die vorhandenen Spurpunkte "hängt".
Eine **Nullpunktsebene** H: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = 0$ (rechte Seite notwendigerweise 0) besitzt, sofern sie keine der Koordinatenachsen enthält, nur den einen Spurpunkt O(0|0|0).

18. Um eine **Ebene** in ein Koordinatensystem zu **zeichnen**, trägt man in der Regel die Spurpunkte bzw. Spurgeraden ein. Mühe machen dabei nur Nullpunktsebenen, insb. wenn sie nicht achsenparallel sind und folglich nur *einen* Spurpunkt (0|0|0) besitzen. Hier bietet es sich an, durch Ausprobieren Lösungen der Ebenengleichung zu suchen, indem man einmal $x_3=0$ setzt und für einen weiteren Punkt $x_2=0$.

19. **Umwandlung der beiden Formen von Ebenengleichungen**:

a) Ist eine Ebene mittels Parametergleichung gegeben, so bildet man das Vektorprodukt der beiden Spannvektoren und erhält so den Normalenvektor für die Koordinatengleichung. Das Absolutglied für die andere Seite der Gleichung berechnet man anschließend als Skalarprodukt aus dem Normalenvektor und dem Ortsvektor des Aufpunkts.

b) Für die Gegenrichtung bestimmt man aus der Koordinatengleichung drei Punkte der Ebene (am einfachsten in der Regel die Spurpunkte, ansonsten behilft man sich wie beim Zeichnen). Aus einem der beiden Punkte und den Verbindungsvektoren zu den beiden anderen bildet man anschließend die Parametergleichung.
Alternativ kann man auch zwei der drei Unbekannten x_i in Parameter verwandeln und daraus eine Lösungsmenge bestimmen, aus der sich anschließend eine Ebenengleichung gewinnen lässt.

20. Eine dritte Form der Ebenengleichung ist die **Normalenform**. Man bestimmt aus der Koordinatengleichung einen Punkt P (Tipp: *einen* Spurpunkt gibt es mindestens) und einen Normalenvektor $\vec{n}$. Mit Hilfe des Ortvektors $\vec{p}$ des Punktes P entsteht dann die Normalengleichung der Ebene: E: $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$. Diese Form ist etwas unhandlich; sie wird aber da und dort gefragt.

21. Für die **Punktprobe** ist eindeutig die Koordinatengleichung am praktischsten (siehe 16.)

22. Zwei **Ebenen** können im Raum verschiedene **Lagen zueinander** einnnehmen:

a) Sie können **parallel** sein. Dies ist der Fall, wenn ihre Normalenvektoren parallel, also Vielfache voneinander sind. Sind die Koordinatengleichungen äquivalent (d.h. die eine ist ein Vielfaches der anderen), so sind die Ebenen sogar **identisch**.

b) In allen anderen Fällen gibt es eine **Schnittgerade**. Sind die Ebenen in Koordinatenform gegeben, so hat man ein LGS mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten. Die Lösungsmenge ermittelt man, indem man eine der Unbekannten - in der Regel x_3 - gleich einem Parameter setzt (z.B. t) und die beiden Gleichungen anschließend nach den beiden anderen Unbekannten auflöst. (Hilfreich ist es dabei, zwischenzeitlich mittels Gauß-Algorithmus die Dreiecksform des LGS herzustellen bzw. herstellen zu lassen.)

Aus einer Lösungsmenge z.B. der Form $\{(a_1 + n_1 \cdot t \mid a_2 + n_2 \cdot t \mid t) \,/\, t \in \mathbb{R}\}$ entsteht dann die Gleichung der Schnittgeraden s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

23. Für **Lagen von Ebenen und Geraden** zueinander kommen nur wenige Möglichkeiten in Betracht:

a) Die Gerade kann zur Ebene **parallel** sein. Dies trifft zu, wenn der Richtungsvektor der Geraden orthogonal zum Normalenvektor der Ebene ist. Falls zusätzlich der Aufpunkt der Geraden in der Ebene liegt (also die Ebenengleichung erfüllt), liegt die ganze Gerade in der Ebene.

b) Die Gerade kann mit der Ebene einen **Schnittpunkt** haben. Um diesen zu bestimmen, zerlegt man die Geradengleichung in drei Einzelgleichungen, setzt x_1, x_2, x_3 in die Koordinatengleichung der Ebene ein und ermittelt so den Parameter. Anschließend setzt man diesen in die Geradengleichung ein und erhält so den (Ortsvektor des) Schnittpunkt(s).

24. Eine weitere Grundlagen-Aufgabe zielt auf die Ermittlung von Abständen:

a) Der **Abstand zwischen zwei Punkten** ist gleich der Länge des Verbindungsvektors.

b) Um den **Abstand eines Punktes P von einer Geraden g** zu ermitteln, bildet man eine zu g orthogonale Hilfsebene H durch P, indem man aus dem Richtungsvektor von g als Normalenvektor der Ebene H eine Koordinatengleichung bildet, deren rechte Seite man durch Einsetzen der Koordinaten von P erhält. Anschließend bestimmt man den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Hilfsebene H und hat somit den Lotfußpunkt. Der Abstand zwischen P und g ist folglich gleich dem Abstand zwischen P und S.

c) Den **Abstand eines Punktes P von einer Ebene E** erhält man mit Hilfe der **Hesseschen Normalenform (HNF)** der Ebene E. Die HNF entsteht aus der Koordinatengleichung $ax_1+bx_2+cx_3=d$, indem man das Absolutglied d auf die linke Seite subtrahiert und die Gleichung anschließend durch die Länge des Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dividiert: HNF(E): $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot (ax_1+bx_2+cx_3-d) = 0$.

Auch dies ist eine Gleichung der Ebene E, d.h. ein Punkt liegt genau dann in der Ebene, wenn seine Koordinaten diese Gleichung erfüllen. Setzt man jedoch einen Punkt P in die linke Seite ein, der nicht in der Ebene liegt, so ist das Ergebnis eine Zahl, deren Betrag den Abstand des Punktes P von der Ebene E wiedergibt.

Ist allerdings zusätzlich der **Lotfußpunkt** L in der Ebene gefragt, so hilft die HNF nicht weiter. Vielmehr bildet man eine Gleichung der Lotgeraden *l* aus dem Normalenvektor der Ebene (als Richtungsvektor) und dem Aufpunkt P. Der Schnitt von *l* mit E ist der gesuchte Lotfußpunkt. Hat man diesen, so kann man den Abstand zwischen P und E auch als Abstand von P und L ermitteln.

d) Den **Abstand zweier paralleler Geraden** f und g berechnet man, indem man zunächst eine Hilfsebene H orthogonal zu beiden Geraden bildet: Als Aufpunkt P von H nimmt man den von f und als Normalenvektor den Richtungsvektor von f. Daraus bildet man die Koordinatengleichung von H. Anschließend ermittelt man den Schnittpunkt S dieser Hilfebene H mit der anderen Geraden g. Der Abstand der beiden Geraden ist dann gleich dem Abstand von P und S.

e) Auch um den **Abstand zweier windschiefer Geraden** f und g zu berechnen, verwendet man eine Hilfsebene H. Dieses Mal soll sie aber parallel zu den beiden Geraden sein. Dazu bildet man eine Parametergleichung von H aus der Parametergleichung von f und dem Richtungsvektor von g als zweitem Spannvektor. Anschließend berechnet man den Abstand des Aufpunkts von g zur Hilfsebene H (siehe c)). Dieser Abstand ist gleich dem Abstand der beiden Geraden.

f) Den **Abstand einer Geraden g von einer Ebene E** zu untersuchen ist nur sinnvoll, wenn g parallel zu E ist. In diesem Fall genügt es, den Abstand des Aufpunkts von g zur Ebene E zu ermitteln (siehe c)). Dieser Abstand ist gleich dem Abstand der Geraden g von der Ebene E.

g) Ebenso ist der **Abstand zweier paralleler Ebenen** E und F gleich dem Abstand des Aufpunkts P der Ebene E von der Ebene F.

Anhang: (Weitere) Beispiele

zu 8. **<u>Länge eines Vektors</u>** $\vec{v}$: Bsp.: $\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$.

<u>Einheitsvektor</u>: Bsp.: $\vec{v_0} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ist ein normierter Vektor.

zu 9. **<u>Winkel zwischen zwei Vektoren</u>**:

Bsp.: $\sphericalangle\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}\right) = \cos^{-1} \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}\right|} = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{34}} \approx \cos^{-1} 0{,}0268 \approx 88{,}5°.$

<u>orthogonal</u>e Vektoren: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 1\cdot1 + 2\cdot1 + 3\cdot(-1) = 0$.

Vektorprodukt: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\4\\-1\end{pmatrix}$ ist zu beiden Faktoren orthogonal.

zu 10. "Dreiecksgleichung": Bsp.: A(1|2|3), B(3|4|-1), C(5|2|-3)

$\Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$ **;** $\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ **;** $\overrightarrow{\mathbf{AC}} = \begin{pmatrix}4\\0\\-6\end{pmatrix}$ **;** $\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} = \begin{pmatrix}4\\0\\-6\end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathbf{AC}}$

zu 11. "**<u>Parameterform einer Geradengleichung</u>**":

Bsp. Für die Gerade PQ durch P(6|2|5) und Q(7|4|8) kann man z.B. P als **<u>Aufpunkt</u>** wählen und z.B. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ als **<u>Richtungsvektor</u>**: PQ: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

<u>Verbindungsstrecke</u>: Bsp.: P, Q wie oben $\Rightarrow \overline{PQ}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $t \in [0; 1]$.

zu 12. **<u>Punktprobe</u>** bei Geraden:

Bsp: R(8|6|12) liegt nicht auf PQ: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, denn $\begin{pmatrix}8\\6\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$,führt zum linearen Gleichungssystem (LGS) (I) $8 = 6+t\cdot1$, (II) $6= 2+t\cdot2$, (III) $12= 5 + t\cdot3$. Die ersten beiden Gleichungen führen zu t=2; dies führt aber bei Gleichung (III) zu einem Widerspruch ($12 \neq 5+2\cdot3$), also besitzt das LGS insgesamt eine leere Lösungsmenge und folglich $R \notin PQ$. Hingegen liegt der Punkt R*(8|6|11) durchaus auf der Geraden.

zu 13. **<u>parallele, orthogonale und weitere sich schneidende Geraden</u>**:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\6\\12\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$, sind **parallel, aber verschieden**, da R(8|6|12) nicht auf g liegt (siehe 12.)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, h*: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\6\\11\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$, sind **identisch**, da R*(8|6|11) auf g liegt (siehe 12.)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, h**: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\6\\12\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$, sind **orthogonal**., da die Richtungsvektoren orthogonal sind.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, h***: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$, schneiden sich (in R*(8|6|11), das ja - siehe 12. - auch auf g liegt) und schließen einen **Winkel von ca. 88,5°** ein, da die Richtungsvektoren einen Winkel von ca. 91,5° (>90°) einschießen.

zu 14. **<u>sich scheidende und windschiefe Geraden</u>** (parallele siehe 13.):

- g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, **schneiden sich** in S(4|–2|–1):

  Zuerst müssen die Parameter verschieden benannt werden (das zweite t wird durch u ersetzt). Man erhält (I) 6+t = -8-4u; (II) 2+2t = -11-3u; (III) 5+3t = 8+3u; umsortiert, sodass die Variablen auf der linken und die Absolutglieder auf der rechten Seite stehen, ergibt sich
  (I) t+4u = -14; (II) 2t+3u= -13; (III) 3t-3u = 3. GTR (rref) bzw. Gauß-Algorithmus liefern daraus
  (I) t = -2; (II) u= -3; (III) 0=0. Setzt man t=-2 in g (oder u=-3) in h ein, erhält man den oben angegebenen Schnittpunkt.

- g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, h*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, sind **windschief**:

  Zuerst müssen die Parameter verschieden benannt werden (das zweite t wird durch u ersetzt). Man erhält (I) 6+t = -8-4u; (II) 2+2t = 11-3u; (III) 5+3t = 8+3u; umsortiert, sodass die Variablen auf der linken und die Absolutglieder auf der rechten Seite stehen, ergibt sich
  (I) t+4u = -14; (II) 2t+3u= 9; (III) 3t-3u = 3. GTR (rref) bzw. Gauß-Algorithmus liefern daraus
  (I) t = 0; (II) u = 0; (III) 0 = 1. Die Gleichung (III) zeigt, dass die Lösungsmenge leer ist, folglich schneiden sich g und h* nicht. Da sie offensichtlich auch nicht parallel sind (siehe 13.), müssen sie windschief sein.

zu 15. "**<u>Parameterform einer Ebenengleichung</u>**":

Bsp. Für die Ebene PQR durch P(6|2|5), Q(7|4|8) und R(8|6|12) kann man P (oder Q oder R) als Aufpunkt wählen und z.B. die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Spannvektoren;

so entsteht die Ebenengleichung PQR: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $t,u \in \mathbb{R}$.

Die Gleichung A: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $t,u \in [0; 1]$ beschreibt die Punkte, die zum

Parallelogramm mit den Seiten $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ gehören (gesamte Fläche einschl. Rand).

zu 16. "**<u>Koordinatenform einer Ebenengleichung</u>**":

E: $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 12$ beschreibt eine Ebene mit einem **<u>Normalenvektor</u>** $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, außerdem

enthält sie z.B. den Punkt P(6|0|0), wie die **<u>Punktprobe</u>** zeigt: $2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 12$.

zu 17. **<u>Spurpunkte</u>**: E: $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 12$ besitzt die Spurpunkte $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|4|0)$ und $S_3(0|0|2)$, wie die folgenden Bestimmungsgleichungen zeigen: $2 \cdot x_1 + 3 \cdot \boldsymbol{0} + 6 \cdot \boldsymbol{0} = 12$; $2 \cdot \boldsymbol{0} + 3 \cdot x_2 + 6 \cdot \boldsymbol{0} = 12$; $2 \cdot \boldsymbol{0} + 3 \cdot \boldsymbol{0} + 6 \cdot x_3 = 12$.

Dagegen besitzt die Ebene F: $3 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 6$ die Spurpunkte $T_1(2|0|0)$ und $T_3(0|0|3)$, jedoch keinen Schnittpunkt mit der x_2-Achse; F ist also parallel zu dieser.

<u>Spurgeraden</u>: Die Ebene E: $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 12$ besitzt die folgenden Spurgeraden:

S_1S_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$; S_1S_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, S_2S_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Dagegen hat die Ebene F nur T_1T_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$,als typische Spurgerade, die beiden anderen sind parallel zur x_2-Achse und besitzen daher deren Richtungsvektor:

t_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$, t_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

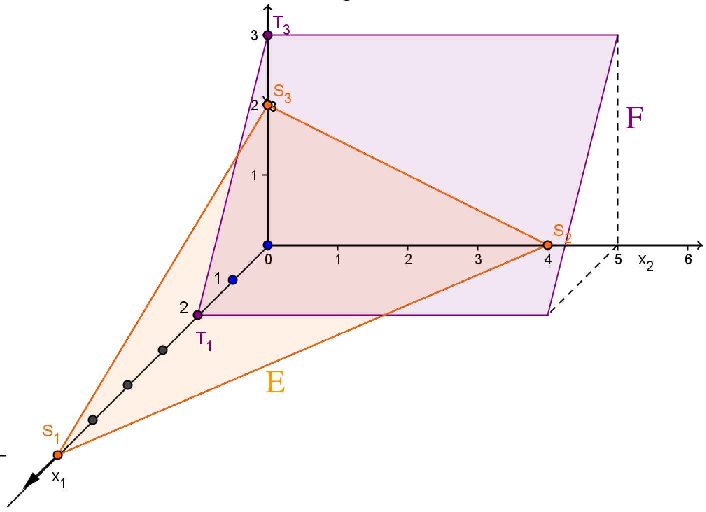
Eine Ebene G: $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 2$, in deren Koordinatengleichung zwei der Vorfaktoren 0 sind, ist parallel zu einer Koordinatenebene. Demgemäß gibt es nur *einen* Spurpunkt, hier $U_3(0|0|3{,}5)$, und nur zwei Spurgeraden, die parallel zu zwei Koordinatenachsen sind:

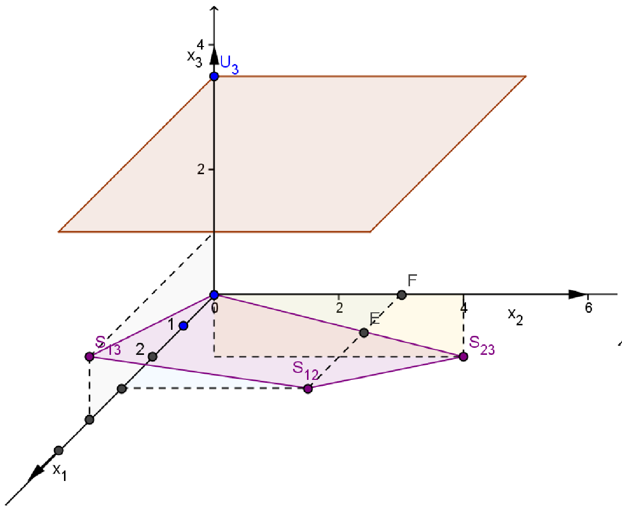
u_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3{,}5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$, u_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3{,}5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

Nullpunktsebene H: $x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$: einziger Spurpunkt $O(0|0|0)$.
Spurgeraden: Aus $x_1 - x_2 - 4\cdot\boldsymbol{0} = 0$ errät man z.B. den Punkt $S_{12}(3|3|\boldsymbol{0})$; $x_1 - \boldsymbol{0} - 4x_3 = 0$ liefert entsprechend $S_{13}(4|\boldsymbol{0}|1)$ und $3\cdot\boldsymbol{0} - x_2 - 4x_3 = 0$ bringt $S_{23}(\boldsymbol{0}|4|-1)$. Daraus gewinnt man

OS_{12}: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$; OS_{13}: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$, OS_{23}: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

zu 18. **Ebene zeichnen**: Rechts sind die beiden Ebenen E und F (siehe 17.) dargestellt.
Unten sind die Ebenen G und H (siehe 17.) gezeichnet.





zu 19. **Umwandlung der beiden Formen von Ebenengleichungen**:

a) **Parameter- → Koordinatengleichung**: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$, $t,u\in\mathbb{R}$.

Zunächst wird mittels Vektorprodukt ein Normalenvektor bestimmt: $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, daraus gewinnt man die rechte Seite der Koordinatengleichung, in die man den Aufpunkt $(6|2|5)$ einsetzt:
$2x_1 - x_2 + 0x_3 = 2\cdot 6 - 1\cdot 2 + 0\cdot 5 = 10$, also ist E: $2x_1 - x_2 = 10$ die gesuchte Koordinatengleichung.

b) **Koordinaten- → Parametergleichung**: E: $2x_1 - x_2 = 10$; dann ersetze das (hier ohnehin beliebige) x_3 durch t und x_1 durch s (normalerweise wählt man eher zusätzlich x_2, aber da hier der Vorfaktor von x_2 einfacher als der von x_1 ist, erscheint die Wahl von x_1 vorteilhaft, wie sich beim Auflösen der Gleichung zeigt: $\Rightarrow 2s - x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = -10 + 2s$ ($x_3 = t$ beliebig)

$\Rightarrow L = \{\, (s \mid -10+2s \mid t) \,/\, s,t\in\mathbb{R}\} = L = \{\, (0+1\cdot s+0\cdot t \mid -10+2s+0\cdot t \mid 0+0\cdot s+1t) \,/\, s,t\in\mathbb{R}\}$

Daraus gewinnt man die Parametergleichung E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $t,u\in\mathbb{R}$.

zu 20: **Normalenform**: z.B. E: $2x_1 - x_2 = 10$ besitzt den Spurpunkt $S_1(5|0|0)$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Daraus ergibt sich die Normalenform E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

zu 21: **Punktprobe**: z.B. P(7|4|13) liegt auf E: $2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 10$, denn $2 \cdot 7 - 4 + 0 \cdot 13 = 10$.

zu 22: **Lagen von Ebenen zueinander**:

a) Bsp. E: $6x_1 + 10x_2 - 8x_3 = 5$ und F: $9x_1 + 15x_2 - 12x_3 = 9$ sind parallel zueinander, da für die Normalenvektoren $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$ und $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ -12 \end{pmatrix}$ gilt: $\vec{n_E} = \frac{2}{3} \cdot \vec{n_F}$.

Da aber die Multiplikation der F-Gleichung mit $\frac{2}{3}$ zu $6x_1 + 10x_2 - 8x_3 = \underline{6}$ und somit *nicht* zur Gleichung von E führt,sind die Ebenen nicht identisch.

b) Bsp. E: $7x_1 - 2x_2 - x_3 = 19$ und F: $16x_1 - 11x_2 + 2x_3 = 22$ sind offensichtlich nicht parallel, besitzen also eine **Schnittgerade** s.

Das Gleichungssystem (I) $7x_1 - 2x_2 - x_3 = 19$ und (II) $16x_1 - 11x_2 + 2x_3 = 22$ lässt sich mittels Gauß (bzw. GTR: rref) auf die folgende Form bringen: (I*) $x_1 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3}$; (II*) $x_2 - \frac{2}{3}x_3 = \frac{10}{3}$.

Folglich ist $x_3 = t$ frei wählbar und (I**) $x_1 = \frac{11}{3} + \frac{1}{3}t$ =; (II**) $x_2 = \frac{10}{3} + \frac{2}{3}t$, $t \in \mathbb{R}$. Dies führt zur Lösungsmenge $L = \{ (\frac{11}{3} + \frac{1}{3}t \mid \frac{10}{3} + \frac{2}{3}t \mid 0 + 1 \cdot t) \ / \ t \in \mathbb{R} \}$. Geometrisch ist das die Schnittgerade

s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 10/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Dies ist ein gültiges Endergebnis. Man kann die Gleichung allerdings vereinfachen, indem man einen anderen Aufpunkt wählt: t= 1 liefert $P(4|4|1) \in s$; zudem lässt sich der Richtungsvektor verdreifachen, sodass die Brüche entfallen: s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

zu 23: Für **Lagen von Ebenen und Geraden** zueinander kommen nur wenige Möglichkeiten in Betracht:

a) **parallel**: z.B. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$; E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t,u \in \mathbb{R}$.

Wieder wandelt man die Ebenengleichung zunächst in Koordinatenform um: E: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12$. Also ist der Normalenvektor von E orthogonal zum Richtungsvektor von g, wie das Skalarprodukt zeigt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 + 3 = 0$. Folglich ist $g \parallel E$.

Da zudem der Aufpunkt P(0|3|2) von g die Koordinatengleichung von E erfüllt, liegen er und somit die ganze Gerade g in E: $g \subset E$.

b) **Schnittpunkt**: z.B. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$; E: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12$. Spaltet man die g-Gleichung in drei lineare Gleichungen auf, so erhält man (I) $x_1 = 5 + r$; (II) $x_2 = 8 + 2r$; (III) $x_3 = -1 - r$.

Dies setzt man in die Ebenengleichung ein:

$(5+r) + 2 \cdot (8+2r) + 3 \cdot (-1-r) = 12$. Daraus ergibt sich $r = -3$. Setzt man diesen Parameter wieder in die Geradengleichung ein, erhält man den Ortsvektor des Schnittpunkts S:

$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Also ist der Schnittpunkt S(2|2|2).

zu 24: **Abstände**:

a) **Abstand zwischen zwei Punkten**: z.B. P(6|2|5), Q(7|4|8) $\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow d(P,Q)= |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{14}$ LE.

b) **Abstand eines Punktes P von einer Geraden g**:

z.B. P(10|–6|9), g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$. Der Richtungsvektor liefert die linke Seite der Koordinatengleichung für die Hilfsebene, sein Skalarprodukt mit dem Ortsvektor von P die rechte: H: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\cdot10+2\cdot(-6)+3\cdot9 = 25$, also H: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 25$. Der Schnittpunkt S dieser Hilfsebene H mit der Geraden g ist S(6|2|5) (Verfahren siehe 23b). Dieser Schnittpunkt ist der Lotfußpunkt von P auf g, folglich ist $d(P,g) = d(P,S) = \sqrt{96} = 4\cdot\sqrt{6} \approx 9{,}80$ LE.

c) **Abstand eines Punktes P von einer Ebene E**: E: $2x_1 +3x_2 + 6x_3 = 12$ besitzt die HNF (in Koordinatenform) E: $\frac{1}{7}\cdot(2x_1 +3x_2 + 6x_3 - 12) = 0$. Somit hat z.B. der Punkt P(2|8|-5) den Abstand

$d(E,P) = |\frac{1}{7}\cdot(2\cdot2 +3\cdot8 + 6\cdot(-5) - 12)| = |\frac{1}{7}\cdot(-14)| = 2$ LE.

Lotfußpunkt L von P auf E: Lotgerade von P auf E ist l: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\8\\-5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$. Der Schnittpunkt von l mit E (und damit Lotfußpunkt) ist $L(2\frac{4}{7}|8\frac{6}{7}|-3\frac{2}{7})$ (vgl. 23b).

d) **Abstand zweier paralleler Geraden** z.B. f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\-2\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix}$, $u\in\mathbb{R}$, sind offensichtlich parallel. Die Hilfsebene H: $2x_1 + x_2 - 6x_3 = -14$ ist orthogonal zu den beiden Geraden und enthält P(1|2|3). Der Schnittpunkt von H mit g ist S(3|4|4) (vgl. 23b), und somit ist $d(g,h) = d(P,S) = |\overrightarrow{PS}| = 3$ LE (insb.sind f und g also nicht identisch).

e) **Abstand zweier windschiefer Geraden**: z.B. f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}16\\-10\\6\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}13\\-14\\2\end{pmatrix}$, $u\in\mathbb{R}$, sind windschief. (Offensichtlich ist dabei nur, dass sie nicht parallel sind; die tatsächliche Lage ergibt sich erst aus dem Fehlen eines Schnittpunkts).

H: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}13\\-14\\2\end{pmatrix}$, $t,u\in\mathbb{R}$, enthält offensichtlich f und ist parallel zu g. Das Vektorprodukt $\begin{pmatrix}-82\\-82\\-41\end{pmatrix}$ der Spannvektoren liefert als vereinfachten Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ und somit die Koordinatengleichung H: $2x_1+2x_2+x_3 = 9$. Mit Hilfe der HNF erhält man als Abstand des Aufpunkts Q(16|–10|6) von g zu H: $d(Q,H) = d(f,g) = 3$LE.

f) **Abstand einer Geraden g von einer Ebene E**: z.B. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}16\\-10\\6\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}13\\-14\\2\end{pmatrix}$, $u\in\mathbb{R}$; E: $2x_1+2x_2+x_3=9$.

Wie bei e) erhält man als Abstand des Aufpunkts Q(16|–10|6) von g zu E: $d(Q,E) = d(g,E) = 3$LE.

g) **Abstand zweier paralleler Ebenen**: E: $2x_1+2x_2+x_3=9$; F: $2x_1+2x_2+x_3= 24$. E ist offensichtlich parallel zu F. F enthält unter anderem den Spurpunkt S(12|0|0), und dessen Abstand zu E ist $d(E,S)= d(E,F) = 5$ LE.